

Ge2i S2 - MA21/22 - Méthodes numériques

#4 : Intégration numérique

F. Morain-Nicolier
frederic.nicolier@univ-reims.fr

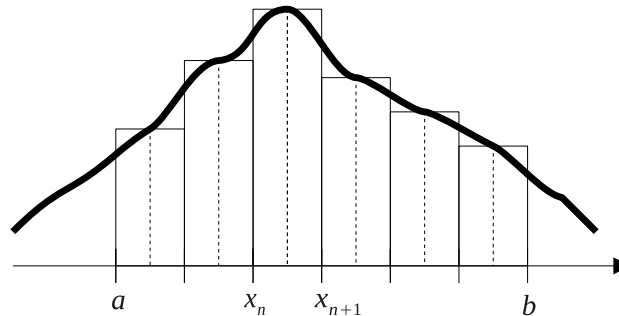
18 mai 2009

Introduction

- L'objectif de cette leçon est de calculer numériquement l'intégrale d'une fonction.
- Selon les travaux de Riemann, l'intégrale d'une fonction peut s'interpréter comme l'aire sous la courbe représentative de cette fonction.
- Le calcul numérique d'une intégrale se réduit donc à l'estimation d'une aire.
- Comme pour l'estimation numérique de la dérivée, plusieurs méthodes sont possibles selon le type de l'approximation réalisée sur la courbe

Rappels mathématiques : intégrale de Riemann

- Si une fonction est positive, son intégrale sur un intervalle $[a, b]$ permet d'évaluer l'aire sous la courbe représentative de la fonction.
- L'idée de Riemann fût de remplacer un arc de courbe correspondant à un petit intervalle $[x_n, x_{n+1}]$ par un segment horizontal d'ordonnée $f(\frac{x_n+x_{n+1}}{2})$.
- On parle alors de fonction en escalier. La figure suivante illustre le procédé de Riemann :



Rappels mathématiques : développement

- À partir d'une subdivision de $[a, b]$ en N intervalles, la somme définie par

$$\text{si } c_n = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}, \quad (1)$$

$$S_N = (x_2 - x_1)f(c_1) + (x_3 - x_2)f(c_2) + \dots + (x_{N+1} - x_N)f(c_N) \quad (2)$$

est une somme de Riemann attachée à f sur l'intervalle $[a, b]$.

- Lorsque $N \rightarrow \infty$, de sorte que les pas $x_{n+1} - x_n$ tendent vers zéro, la somme S_N admet une limite finie appelée intégrale de f sur $[a, b]$. On note alors :

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N. \quad (3)$$

Méthode des rectangles

- Ce principe permet le calcul approché d'intégrales en choisissant une subdivision régulière avec des pas constants :

$$x_{n+1} - x_n = h = \frac{b - a}{N} \quad (4)$$

et N "assez grand".

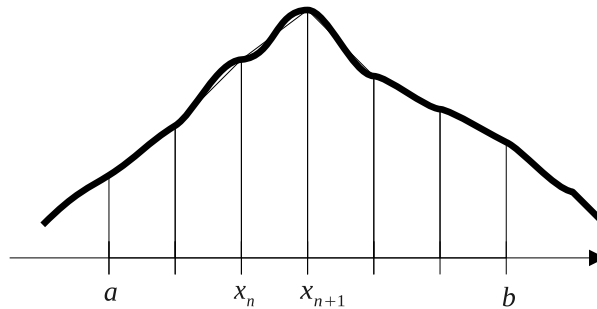
- Cette méthode de calcul (dite méthode des rectangles) consiste donc à calculer :

$$S_N^{\text{Rectangles}} = h \sum_{n=1}^N f\left(x_n + \frac{h}{2}\right). \quad (5)$$

- Les arcs de la courbes sont remplacés par des segments horizontaux.
- La méthode converge lentement, elle nécessite de grandes valeurs de N pour obtenir des résultats acceptables.

Méthode des trapèzes

- Une seconde méthode consiste donc à remplacer les arcs de courbes par des segments de droites joignant les ordonnées choisies :



- Cette méthode d'intégration (dite des trapèzes) décrite par Newton et Cotes, consiste à réaliser une interpolation linéaire (ordre 1).
- Chaque aire est celle d'un trapèze de hauteur $x_n + x_{n+1}$ et de bases $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$.
- L'intégrale de f est donc approchée en calculant la suite suivante :

$$S_N^{\text{trapèzes}} = h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{n=2}^N f(x_n) \right). \quad (6)$$

- Cette méthode est plus précise que celle des rectangles.

Méthode de Simpson

- Le défaut évident de la méthode des trapèzes est de remplacer grossièrement les arcs de courbes par des segments de droites.
- La méthode de Simpson consiste à regrouper trois points consécutifs et à remplacer l'arc correspondant par un arc de parabole.
- Au final, l'intégrale peut être évaluée en calculant la somme suivante :

$$S_N^{\text{Simpson}} = \frac{h}{3} \left(f(a) + f(b) + 4 \sum_{n \text{ pairs}} f(x_n) + 2 \sum_{n \text{ impairs}} f(x_n) \right). \quad (7)$$

- N doit être pair.

Bilan

Méthode	Approximation	Formule
rectangles	constante	$h \sum_{n=1}^N f\left(x_n + \frac{h}{2}\right)$
trapèzes	droite	$h \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{n=2}^N f(x_n) \right)$
Simpson	parabole	$\frac{h}{3} \left(f(a) + f(b) + 4 \sum_{n \text{ pairs}} f(x_n) + 2 \sum_{n \text{ impairs}} f(x_n) \right)$