

Ge2i S2 - MA21/22

Méthodes numériques

#3 : Dérivation numérique

F. Morain-Nicolier
frederic.nicolier@univ-reims.fr

14 mai 2009

Rappel sur la dérivation

- La dérivée d'une fonction f est notée $\frac{df}{dx}$.
- Elle est définie par :

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (1)$$

- La dérivée peut être définie à partir de la limite à gauche :

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}. \quad (2)$$

- Il est également possible de calculer une limite symétrique :

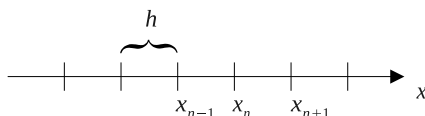
$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}. \quad (3)$$

Discrétisation des variables

- Dans la pratique, un ordinateur ne sait traiter que des objets discrets ou finis.
- Pour une fonction $f(x)$ à étudier, il n'est donc pas possible de travailler sur toutes les valeurs possibles de x .
- Une variable discrétisée x_n est donc introduite :

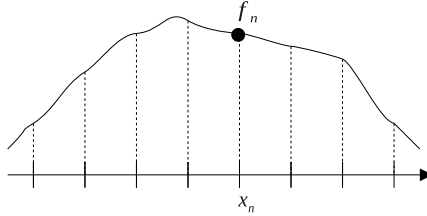
$$x_n = nh, \quad (4)$$

où h est le pas de discrétisation.



Discrétisation des variables

- On note alors $f_n = f(x_n)$:



- Plus la valeur de h est faible, plus la fonction discrète f_n est proche de $f(x)$.
- Cependant, chaque valeur occupe un espace fini en mémoire et est représentée avec une précision limitée.
- Plutôt que de représenter les nombres avec un nombre limité de chiffres après la virgule, ils sont représentés sous forme de flottant :

$$x = m10^b, \quad (5)$$

où m est la mantisse et b l'exposant.

- Cette représentation reste néanmoins limitée en précision et les approximations peuvent générer des erreurs de calcul.

Dérivation numérique

- En calculant une dérivée numérique, on ne cherche pas à obtenir l'expression littérale de la dérivée $\frac{df}{dx}(x)$, mais à évaluer celle-ci pour tous les points x_n .
- Cette évaluation est directement réalisée à partir de f_n .
- On note df_n l'estimation de la dérivée réalisée au point x_n , en adaptant les équations (1) et (3) :

$$df_n = \frac{f_{n+1} - f_n}{h} \quad (6)$$

$$\text{ou encore } df_n = \frac{f_{n+1} - f_{n-1}}{2h} \quad (7)$$

- Les questions à se poser lors de l'évaluation numérique de la dérivée d'une fonction sont :
 - quelle méthode choisir ?
 - Quelle valeur choisir pour le pas de discrétisation h ?